***Exercice 1*:**

Un corps de masse $\mathbf{m_1}$ = **3,2 kg** se déplace vers l'ouest à la vitesse de **6,0 m/s**. Un autre corps différent, de masse $\mathbf{m_2}$ = **1,6 kg**, se déplace vers le nord à la vitesse de **5,0 m/s**. Les deux corps entrent en interaction. Au bout de **2s**, le premier corps se déplace dans la direction **N 30° E** à la vitesse de **3,0 m/s**.

Représenter puis calculer :

a)- La quantité de mouvement totale des deux particules avant et après les **2s**.

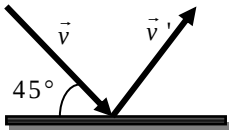
b)- Le changement de quantité de mouvement de chaque particule, ainsi que les forces d'interaction.

c)- Le changement de vitesse de chaque particule.

d)- La grandeur et la direction de la vitesse du deuxième corps.

***Exercice2*:**

Un corps de masse m = 5 kg se déplace à une vitesse v = 30 m/s. Il tape sur une plaque de métal à un angle de 45° par rapport à l'horizontale. Il rebondit avec le même vitesse et le même angle (voir figure). Si le temps de l'interaction est de 2 s.



1- Quelle est la variation de la quantité de mouvement de ce corps

2- Quelle est la force moyenne qui lui a été appliquée.

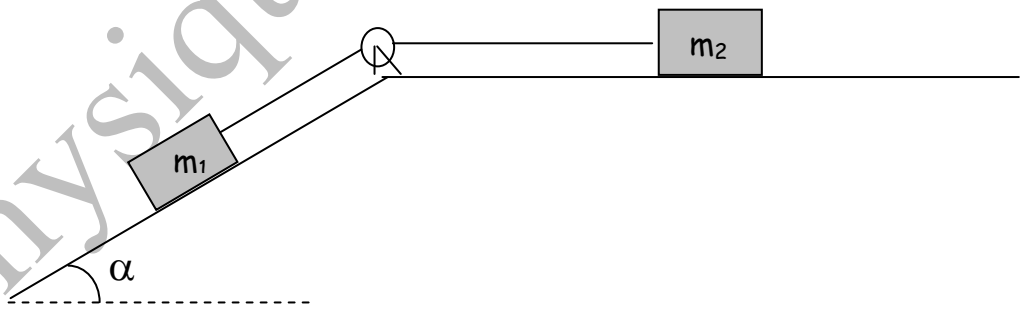
Exercice 3 :

On considère le système représenté par la figure ci-contre .La masse m_1 peut glisser sans frottements sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

La masse m_2 peut glisser sur le plan horizontal caractérisé par les coefficients de frottement statique μ_s= 0.6 et dynamique μ_g=0.5.

Le fil est inextensible, les masses de la poulie et du fil sont négligeables.

On Donne: $\alpha = 30^0$ m_2=2kg g= 10m/s^2



1- Calculer la valeur minimum de m_1 pour laquelle le système se met en mouvement.

2- Représenter, dans ce cas, les forces appliquées à chacune des masses.

Echelle : 1 cm ⟶ 4 N

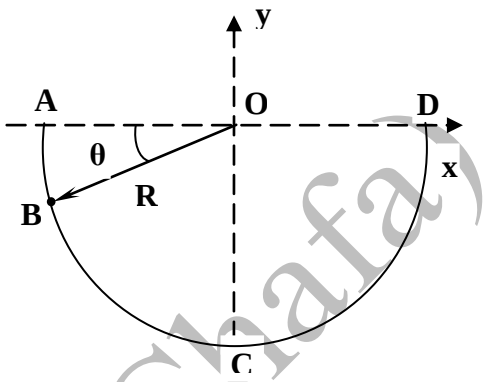
3- Pour m_1=4kg, déterminer l'accélération a de chaque masse et la tension T du fil.

Physique USTHB (Chafa)

***Exercice4*:**

On considère le mouvement d'une particule de masse **m = 100g**, sur une piste de rayon **R = 1m**. Le contact particule/piste présente la caractéristique suivante:

$$\mu s = 0,5777,$$



1°)- Quelle est la valeur minimale θ_m de l'angle θ, pour laquelle la particule, posée sur la piste, reste en équilibre ?

2°)- En un point N de la piste repéré par l'angle θ_N = **60°**, la particule a une accélération **a = 2,8m/s²**, et une vitesse **v = 1m/s²**, on demande de déterminer la force de contact $\vec{C}$, et de représenter les forces agissant sur la particule à l'échelle : **1cm → 0,5N.**

3°) Déduire le coefficient de frottement dynamique μ_d.

Exercice 5 :

Deux corps identiques (A) et (B) de masse M_A=M_B=2kg, en contact l'un avec l'autre reposent sur un plan horizontal (voir figure) : coefficients : statique μ_S =0.4 et dynamique μ_D inconnu.

On applique au corps (A) une force oblique $\vec{F}$ faisant un angle α=30° avec l'horizontale.

1^0) Quelle force $\vec{F}$ minimale faut-t-il appliquer au corps (A) pour rompre l'équilibre du système.

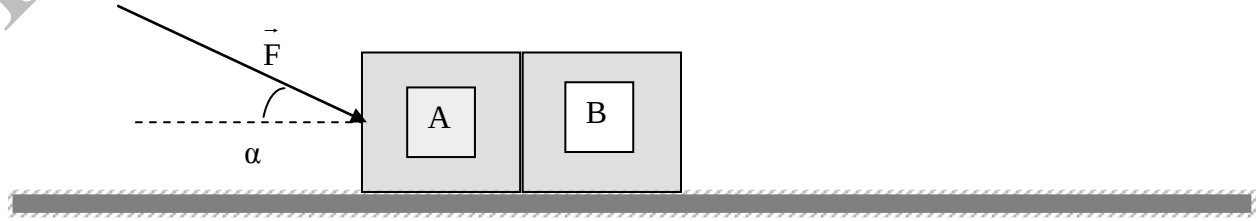
2^0) a) Représenter qualitativement les forces appliquées aux corps (A) et (B) séparément.

b) Déterminer, dans ces conditions, la force de contact entre les deux corps (A) et (B).

3^0) On applique une force $\vec{F}$ de module égal à 30N, les corps (A) et (B) démarrent en même temps avec une accélération a= 4m/s^2 qui reste constante tout au long du mouvement.

a) Déterminer la composante C_x de la force de contact exercée par le plan sur les deux corps.

b)En déduire le coefficient de frottement dynamique μ_D.



Physique USTHB (Chafa)

Exercice 6 :

Un corps **A** de masse m_A=**2Kg,** repose sur un corps **B** de masse m_B = **3Kg**. L'ensemble repose sur une table horizontale. On admettra que les dimensions de la table et du corps **B** sont telles que **A** ne puisse pas quitter le dessus de **B**, et **B** le dessus de la table, dans l'intervalle de temps : **0 ≤ t ≤ 80s**.

Une force horizontale et de direction fixe, variant suivant la loi $F(t) = \alpha t$ (α = 0,5N/s), est appliquée au corps **B**.

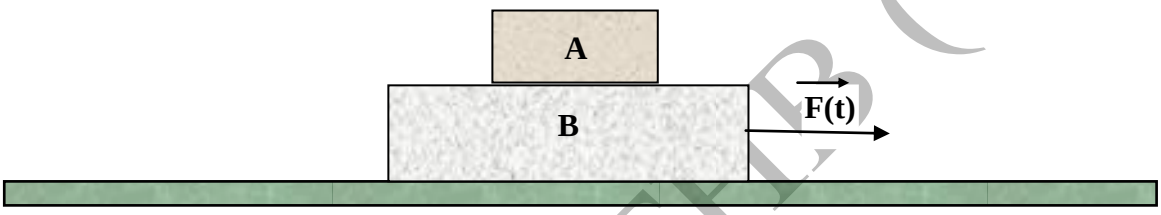
Le contact (corps B)/(table) est caractérisé par les coefficients de frottements : $\mu_s = \mu_d$ = **0,5**. Le contact (corps A)/ (corps B) est, lui parfaitement lisse.

1°)- Déterminez l'instant t_0 de la rupture de l'équilibre (instant ou le système se met en mouvement.

2°)- Dessinez qualitativement les forces appliquées à l'instant t_1 = **30s** :

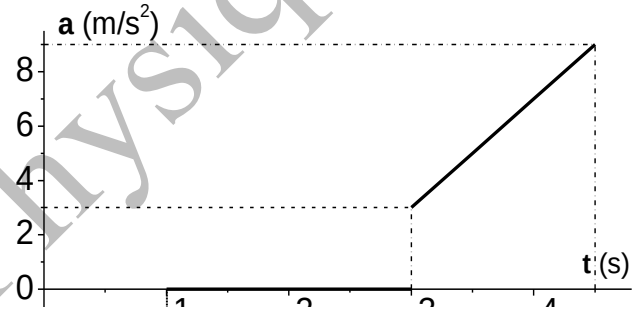
- au corps **A** tout seul ; - au corps **B** tout seul, - au système (**A+B**).

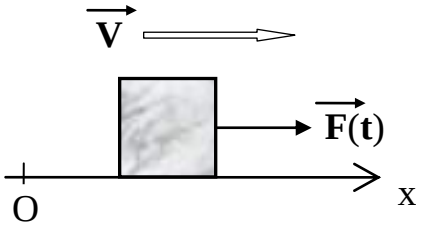
3°)- Déterminez, puis dessinez, les forces appliquées au corps **B** tout seul à l'instant t_2 = **60s**. Echelle : **1cm → 10N**.



Exercice 7 :

Une masse **m = 0,5 kg** glisse ***avec frottement*** sur un plan horizontal suivant une trajectoire rectiligne **Ox**. Cette masse est constamment soumise à son poids $\vec{P}$ et à la force de contact $\vec{C}$ qu'exerce le plan sur elle. En plus, à partir de **t = 2s**, une troisième force $\vec{F}(t)$ variable, constamment dirigée vers les **x** positifs, est appliquée sur cette masse. Il en résulte un mouvement dont l'accélération **a(t)** est donnée sur la figure ci dessous. A l'instant initial **t = 0 s**, la vitesse de la masse est V_0 = **1m/s**.





1°)- Déterminer l'instant où **V = 2m/s**

2°)- Tracer le graphe **V(t)** pour **0s ≤ t ≤ 4s** ;

Echelles : **1 cm → 0,5 s ;** **1 cm → 0,5 m/s**.

3°)-a- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à m pour **t>3s**.

-b- Sachant que le coefficient de frottement dynamique entre la masse m et le plan est μ_D = **0,1**, représenter les forces qui agissent sur la masse m à **t = 4s**.

Echelle : **1cm → 1N** ; on prendra **g = 10 m/s²**.

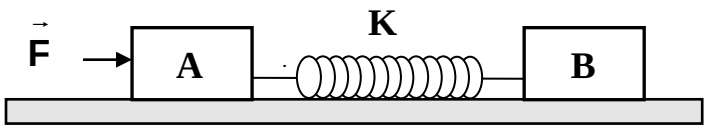
Physique USTHB (Chafa)

Donner l'expression analytique de $F(t)$ pour **t > 3s**.

Exercice 8 :

Deux blocs **A** et **B** de même masse **M**, sont reliés par un ressort parfait de constante de raideur **K**. L'ensemble est disposé sur un plan horizontal (voir figure). Les frottements entre le plan et les masses sont caractérisés par μ_s et μ_g. On donne :

M = 1kg ; μ_s = 0,5 ; μ_g = 0,4 ; K = 200N/m et **g = 10m/s²**.



Le ressort n'étant ni comprimé ni tendu, on applique une force $\vec{F}$ sur le corps **A**.

1°)- Quelle force F_0 minimum faut-il appliquer au bloc **A** pour qu'il se mette en mouvement?

2°)- Pour **F = F_0**, calculer et représenter à l'échelle: **1cm → 2N** , les forces agissantes sur **A** et **B**. On gardera la même échelle pour tout l'exercice

3°)- Pour quel déplacement minimum de la masse **A**, la masse **B** se met-elle en mouvement ?

4°)- Calculer et représenter les forces agissantes sur les deux blocs **A** et **B** juste avant que **B** ne se mette en mouvement.

5°)- A s'étant mis en mouvement, il se déplace alors à vitesse constante sur **x = 2.5 cm**. Calculer et représenter les forces agissants sur les deux blocs **A** et **B**.

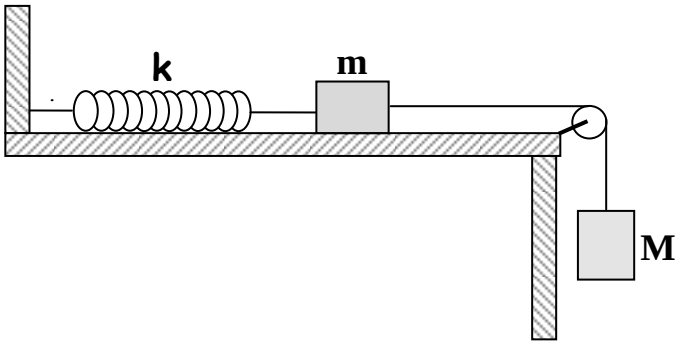
Exercice 9:

Un corps de masse **M** est relié à un corps de masse **m** = 2 kg par l'intermédiaire d'un fil inextensible de masse négligeable. Un ressort **K=150N/m** de masse négligeable est attaché à la masse **m** et au mur.

1°)- Dans le cas où on néglige les frottements de la masse **m** sur le plan horizontal, calculer littéralement l'accélération prise par le système ainsi que la tension du fil.

2°)- Les frottements n'étant plus négligeables et le ressort n'étant pas tendu, quelle est la valeur maximum de la masse **M** à suspendre pour que le système reste au repos? La valeur du coefficient de frottement statique est **μ_s=0,8**

3°)- On prend maintenant une masse M = 3 kg et le ressort est étirée de **10cm**, calculer à cette position l'accélération du système et la tension du fil sachant que le coefficient de frottement dynamique est **μ_d=0,25**.



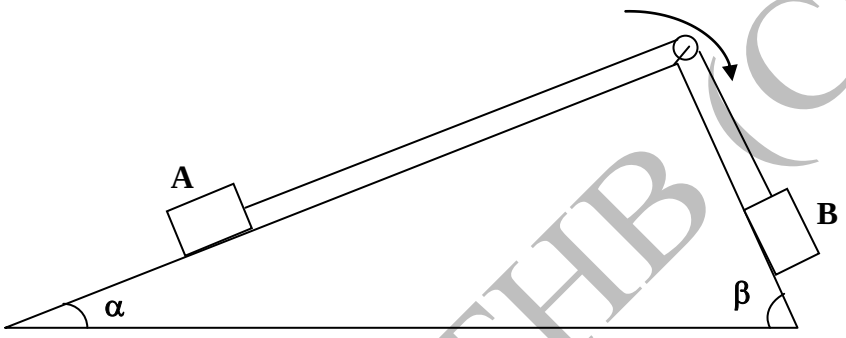
Physique USTHB (Chafa)

Exercice 10:

Un fil inextensible de masse négligeable passe dans la gorge d'une poulie de masse négligeable. On accroche aux extrémités du fil deux masses m_A et m_B assimilées à des points matériels, glissant sur des plans inclinés d'angles α et β (voir figure). Les coefficients de frottements statique μ_s et dynamique μ_d sont les mêmes sur les deux plans.

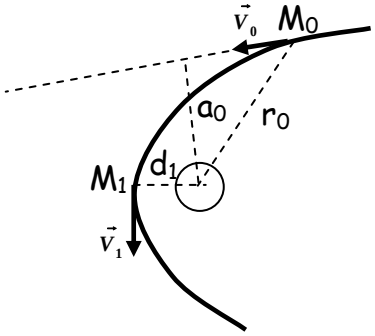
On donne : $m_B = 1$ kg, $m_A < m_B$, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\mu_s = 0.5$, $\mu_d = 0.3$ et $g = 10$ m/s^2.

1- Représenter qualitativement les forces agissant sur chacune des masses.
2- Quelle est la valeur de m_A pour rompre l'équilibre ?
3- Donner la valeur de la tension du fil.
4- Le système est maintenant en mouvement, avec $m_A = 0.3$ kg, trouver l'expression de l'accélération du système. Calculer cette accélération.



Exercice 11 :

Une comète, venant de l'espace interplanétaire, rentre dans le champ d'attraction terrestre puis s'éloigne. Sa trajectoire est donnée sur la figure suivante. Si V_0 est sa vitesse dans la position M_0, déterminer sa vitesse V_1 lorsqu'elle se trouve à la distance d_1 la plus proche de la terre.

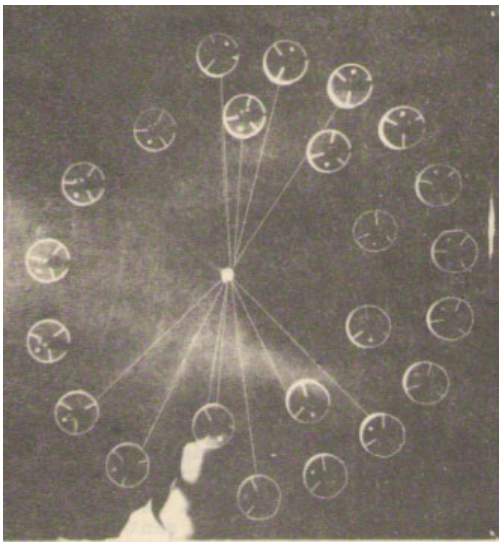


Exercice 12 :

Une masse m accrochée à une ficelle qui passe par un trou placé au centre d'une table horizontale. La masse tourne sans frottement sur la table, sa trajectoire est un cercle de rayon R_1 et sa vitesse angulaire est ω_1.

On diminue le rayon du cercle en tirant sur la ficelle d'une longueur r quelle est la nouvelle vitesse angulaire ω_2.

Même question si on augmente le cercle de la même longueur.



Physique USTHB (Chafa)

Exercice 13 :

Un satellite fait le tour de la terre toutes les 98 minutes à une altitude moyenne de 500 km. Sachant que le rayon de la terre est R = 6.4 10^6 m.

1- Calculer la masse de la terre.
2- A quelle altitude, par rapport à la surface de la terre, il aura une accélération de la pesanteur g = 4.5 m/s^2 ?

Exercice 14 :

Un satellite de masse m_1 est en orbite autour de la terre, de masse M et de rayon R, à une distance r_1.

1- Donner l'expression de l'accélération de la pesanteur g de ce satellite en fonction de g_0 accélération de la pesanteur à la surface de la terre, R et de l'altitude h du satellite.
2- Un autre satellite de masse m_2 est en orbite autour de la terre à une distance r_2.

Etablir la relation liant les périodes de rotation de ces deux satellites en fonction des rayons de leurs orbites ($3^{ème}$ loi de Kepler).

3- Si le rayon du premier satellite est R et celui du deuxième est 4R, quelle est le rapport entre leur période.

Exercice15 :

On considère un point matériel de masse **m** qui glisse sans frottements, sur une demi- sphère de rayon **R**, de centre **O**, posée sur le plan horizontal **xOy**, l'axe **Oz** étant vertical ascendant (voir figure). A l'instant **t = 0 s**, la masse est abandonnée sans vitesse initiale, en un point **M** du plan **xOz** défini par l'angle θ_o = **(Oz, OM)**.

1°)- Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse **m**. En déduire que le mouvement s'effectue entièrement dans le plan **xOz**.

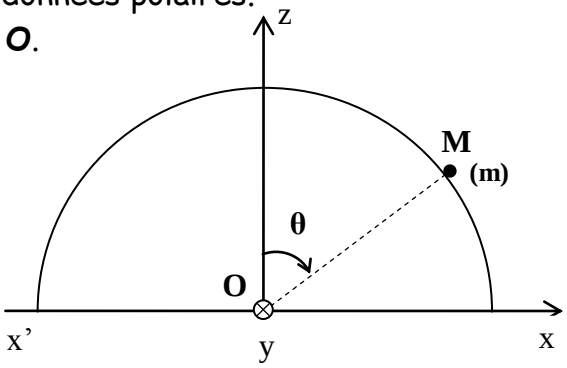
2°)- Calculer la vitesse et l'accélération de **m** en coordonnées polaires.

3°)- Calculer le moment cinétique de **m** par rapport à **O**.

En appliquant le théorème du moment cinétique,

Trouver une équation différentielle régissant **θ(t)**.

4°)- Retrouver cette dernière équation à partir de la relation fondamentale de la dynamique.

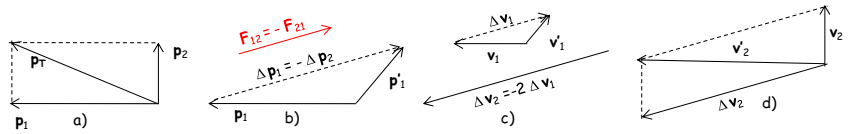


Physique USTHB (Chafa)

M. Hachemane (usthbst10@gmail.com), A. Dib et A. Chafa

Exercice 1

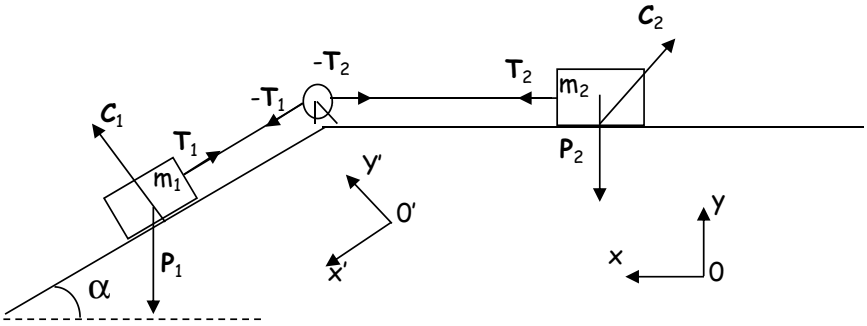
Données : $m_1 = 3.2kg$, $v_1 = 6.0m/s$ 0uest, $m_2 = 1.6kg$, $v_2 = 5.0m/s$ Nord, $\Delta t = 2s$, $v_1' = 3.0m/s$ N 30° E.
A chaque étape, on fait d'abord la somme ou la différence vectoriel géométriquement.



Un calcul avec l'échelle donne : a) $p_T = 20.8kg.m/s$, b) $\Delta p_1 = \Delta p_2 = 25.4kg.m/s$ et $F_{12} = F_{21} = 12.7N$
c) $\Delta v_1 = 7.9m/s$ et $\Delta v_2 = 15.8m/s$, d) $v_2' = 15.0m/s$
On donne maintenant un calcul analytique :
a) Représentation : $\vec{p}_T = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Système isolé $\vec{p}_T = \vec{p}_T'$.
Calcul : $p_1 = 19.2kg.m/s$, $p_2 = 8kg.m/s$ et $p_T = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 20.8kg.m/s$
b) Représentation : $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1$. Comme $\vec{p}_T' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_T \implies \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = -(\vec{p}_1' - \vec{p}_1) \implies \Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$
$\vec{F}_{12} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{2}$ et $\vec{F}_{21} = \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = -\vec{F}_{12}$
Calcul : $\vec{p}_1' = m_1v_1'\cos\alpha\vec{i} + m_1v_1'\sin\alpha\vec{j}$ et $\vec{p}_1 = -m_1v_1\vec{i}$. Donc $\Delta\vec{p}_1 = m_1(v_1'\cos\alpha + v_1)\vec{i} + m_1v_1'\sin\alpha\vec{j}$ et $\Delta\vec{p}_2 = -m_1(v_1'\cos\alpha + v_1)\vec{i} - m_1v_1'\sin\alpha\vec{j}$
$\Delta\vec{p}_1 = 24\vec{i} + 8.3\vec{j}$ et $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \sqrt{(24)^2 + (8.3)^2} = 25.4kg.m/s$
$\vec{F}_{12} = 12\vec{i} + 4.2\vec{j} = -\vec{F}_{21}$ et $F_{12} = F_{21} = \frac{\Delta p_1}{2} = 12.7N$
c) Représentation : La même que celle de $\Delta\vec{p}$ car $\Delta\vec{p}_1 = m_1\Delta\vec{v}_1$ et $\Delta\vec{p}_2 = m_2\Delta\vec{v}_2$
Calcul : $\Delta\vec{v}_1 = \frac{\Delta\vec{p}_1}{m_1} = (v_1'\cos\alpha + v_1)\vec{i} + v_1'\sin\alpha\vec{j} = 7.5\vec{i} + 2.6\vec{j}$ et $\Delta v_1 = \frac{\Delta p_1}{m_1} = 7.9m/s$
$\Delta\vec{v}_2 = \frac{\Delta\vec{p}_2}{m_2} = -\frac{\Delta\vec{p}_1}{m_2} = -\frac{m_1}{m_2}\Delta\vec{v}_1 = -15\vec{i} - 5.2\vec{j}$ et $\Delta v_2 = \frac{m_1}{m_2}\Delta v_1 = 15.8m/s$
d) Représentation : $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 + \Delta\vec{v}_2$
Calcul : $\vec{v}_2' = -15\vec{i} - 0.2\vec{j}$ et $v_2' = \sqrt{15^2 + 0.2^2} = 15.0m/s$

Exercice 2

Données $\mu_s = 0.6$, $\mu_g = 0.5$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $m_2 = 2kg$, $g = 10m/s^2$
1. Les forces agissant sur m_1 sont ($\vec{P}_1$,$\vec{C}_1$,$\vec{T}_1$). Celles agissant sur m_2 sont ($\vec{P}_2$,$\vec{C}_2$,$\vec{T}_2$).



$\vec{C}_1$ est perpendiculaire au plan incliné car il n'y a pas de frottements.
$\vec{C}_2 = \vec{C}_0$ (limite de l'équilibre) est inclinée vers la droite pour l'une des deux raisons suivantes :
– m_2 essaye de glisser vers la gauche et $\vec{C}_0$ s'oppose à ce glissement.
– il y a équilibre, donc $\vec{C}_2 = -\left(\vec{P}_2 + \vec{T}_2\right)$.
Appliquons la RFD aux deux masses :

Système m_1	Système m_2
$\vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0}$	$\vec{P}_2 + \vec{C}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$
$O'x'$: $\left\|\vec{T}_1\right\| = m_1 g\sin\alpha$	Ox : $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \left\|\vec{T}_2\right\|$
$O'y'$: $\left\|\vec{C}_1\right\| = m_1 g\cos\alpha$	Oy : $\left\|\vec{C}_{0y}\right\| = m_2 g$

Masses négligeables du fil et de la poulie : $\left\|\vec{T}_2\right\| = \left\|\vec{T}_1\right\|$. Limite de l'équilibre $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s\left\|\vec{C}_{0y}\right\| = \mu_s m_2 g$. On trouve $m_1 g\sin\alpha = \mu_s m_2 g \Rightarrow m_1 = \frac{\mu_s m_2}{\sin\alpha} \Rightarrow, m_1 = 2.4kg$
2. On doit déterminer toutes les forces et représenter les forces réelles (non leurs composantes) aux bons points d'application :

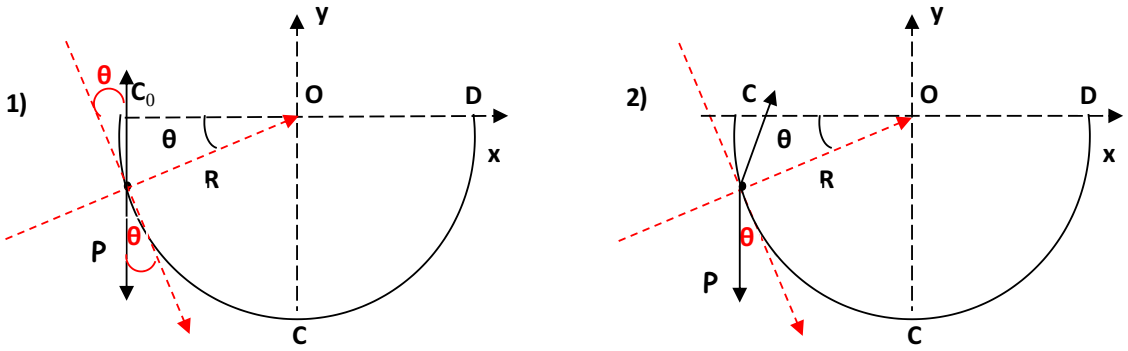
$\left\|\vec{P}_1\right\| = m_1 g = 24N$, $\left\|\vec{C}_1\right\| = m_1 g\cos\alpha = 20.79N$, $\left\|\vec{T}_1\right\| = m_1 g\sin\alpha = 12N$.
$\left\|\vec{P}_2\right\| = \left\|\vec{C}_{0y}\right\| = m_2 g = 20N$, $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s m_2 g = 12N$, $\left\|\vec{C}_0\right\| = 23.32N$, $\left\|\vec{T}_2\right\| = 12N$
Il suffit de refaire la représentation de la première question mais en respectant l'échelle. Remarquez les points d'application des forces. Les composantes de $\vec{C}_2$ peuvent être représentées en trait pointillé pour respecter cette échelle (les composantes des forces de contact sont des projections mathématiques, elles n'existent pas réellement).
3. Donnée $m_1 = 4kg > 2.4N$. On a un glissement vers la gauche et $\vec{C}_2$ est inclinée vers la droite car sa composante $\vec{C}_{2x}$ doit être dans le sens contraire du mouvement (frottements). Les autres forces gardent les mêmes directions.

Système m_1	Système m_2
$\vec{P}_1 + \vec{C}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$	$\vec{P}_2 + \vec{C}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$
Ox' : $m_1 g\sin\alpha - \left\|\vec{T}_1\right\| = m_1 a_1$	Ox : $\left\|\vec{T}_2\right\| - \left\|\vec{C}_x\right\| = m_2 a_2$
Oy' : $\left\|\vec{C}_1\right\| = m_1 g\cos\alpha$	Oy : $\left\|\vec{C}_y\right\| = m_2 g$
	$\left\|\vec{C}_x\right\| = \mu_g \left\|\vec{C}_y\right\| = \mu_g m_2 g$

Masses négligeables du fil et de la poulie : $\left\|\vec{T}_2\right\| = \left\|\vec{T}_1\right\| = \left\|\vec{T}\right\|$. Fil inextensible $a_1 = a_2 = a$.
$(Ox') + (Ox) \Rightarrow m_1 g\sin\alpha - \mu_g m_2 g = (m_1 + m_2)\, a \Rightarrow a = g\frac{m_1\sin\alpha - \mu_g m_2}{(m_1+m_2)} = 1.67\frac{m}{s^2}$
$(Ox') \Rightarrow \left\|\vec{T}_1\right\| = m_1\left(g\sin\alpha - a\right) = g\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\sin\alpha + \mu_g\right) = 13.33N$

Exercice 3

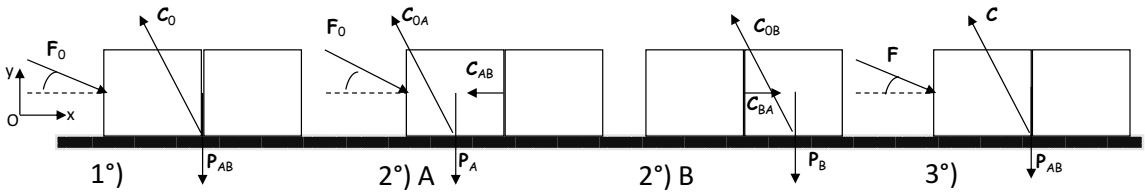
Données $m = 100g$, $R = 1m$, $\mu_s = 0.5777$, $g = 9.81ms^{-2}$



1. C'est la limite de l'équilibre $\vec{P} + \vec{C}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{C}_0 = -\vec{P}$
Axe normal : $mg\sin\theta_m = C_{0n}$. Axe tangentiel : $mg\cos\theta_m = C_{0t} = \mu_s C_{0n} = \mu_s mg\sin\theta_m$. Donc $\tan\theta_m = \frac{1}{\mu_s} = 1.731$.
Donc $\theta_m = 59.98°$
2. La particule a surement été lâchée d'un angle $\theta < \theta_m = 59.98°$ car elle est en mouvement. Elle arrive à $\theta_N = \frac{\pi}{3}$ avec l'accélération $a = 2.8ms^{-2}$ et la vitesse $v = 1ms^{-1}$. Dans ce cas, on a :
$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$ (On suppose que μ_g n'est pas donné)
Axe normal : $-mg\sin\theta_N + C_n = ma_n = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow C_n = m\left(g\sin\theta_N + \frac{v^2}{R}\right) = 0.95N \to 1.9cm$
Détermination de C_t :
Axe tangentiel $mg\cos\theta_N - C_t = ma_t = m\sqrt{a^2 - \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$
$C_t = mg\cos\theta_N - m\sqrt{a^2 - \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = 0.23N \to 0.46cm$
3. On peut alors déterminer $\mu_g = \frac{C_\parallel}{C_\perp} = \frac{C_t}{C_n} = 0.24$

Exercice 4

Données $m = 2kg$, $\mu_s = 0.4$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $g = 9.81m/s^2$



1. On considère les deux masses comme un seul système. A la limite de l'équilibre on a
$\vec{P} + \vec{C}_0 + \vec{F} = \vec{0}$ où $\vec{P} = 2m\vec{g}$ et $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s\left\|\vec{C}_{0y}\right\|$.
Axe Ox : $\left\|\vec{F}_x\right\| = \left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s\left\|\vec{C}_{0y}\right\| \Rightarrow \left\|\vec{F}\right\|\cos\alpha = \mu_s\left\|\vec{C}_{0y}\right\|$

Axe Oy : $\left\|\vec{F}_y\right\| + 2mg - \left\|\vec{C}_{0y}\right\| = 0 \Rightarrow \left\|\vec{F}\right\| \sin\alpha + 2mg = \left\|\vec{C}_{0y}\right\|$

$(Ox) - \mu_s\,(Oy) \Rightarrow \left\|\vec{F}\right\| (\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha) - 2\mu_s mg = 0 \Rightarrow \left\|\vec{F}\right\| = \frac{\mu_s}{(\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha)} 2mg = 23.57N$

2.a. Forces sur A : $\vec{F}$, $\vec{P}_A$, $\vec{C}_A$ (action du sol qui s'oppose au mouvement), $\vec{C}_{AB}$ (B empêche A de se déplacer).
Forces sur B : $\vec{P}_B$, $\vec{C}_B$ (action du sol qui s'oppose au mouvement), $\vec{C}_{BA}$ (A pousse B pour le déplacer).

2.b. Pour A : $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{C}_A + \vec{C}_{AB} = \vec{0}$. Pour B : $m\vec{g} + \vec{C}_B + \vec{C}_{BA} = \vec{0}$ avec $\vec{C}_{BA} = -\vec{C}_{AB}$

Ox pour (A) : $\left\|\vec{F}\right\| \cos\alpha - \left\|\vec{C}_{Ax}\right\| - \left\|\vec{C}_{AB}\right\| = 0$ et Ox pour (B) : $\left\|\vec{C}_{Bx}\right\| = \left\|\vec{C}_{BA}\right\|$

Oy pour (A) : $-\left\|\vec{F}\right\| \sin\alpha - mg + \left\|\vec{C}_{Ay}\right\| = 0$ et Oy pour (B) : $\left\|\vec{C}_{By}\right\| = mg$

A la limite de l'équilibre, on a $\left\|\vec{C}_{Ax}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{Ay}\right\|$ et $\left\|\vec{C}_{Bx}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{By}\right\|$

Les équations de (B) donnent directement $\left\|\vec{C}_{BA}\right\| = \mu_s mg = 7.85N = \left\|\vec{C}_{AB}\right\|$

3. Données $\left\|\vec{F}\right\| = 30kgm/s^2$, $a = 4m/s^2$

3.a. Considérons les deux corps comme un seul système

$\vec{F} + 2m\vec{g} + \vec{C} = 2m\vec{a}$

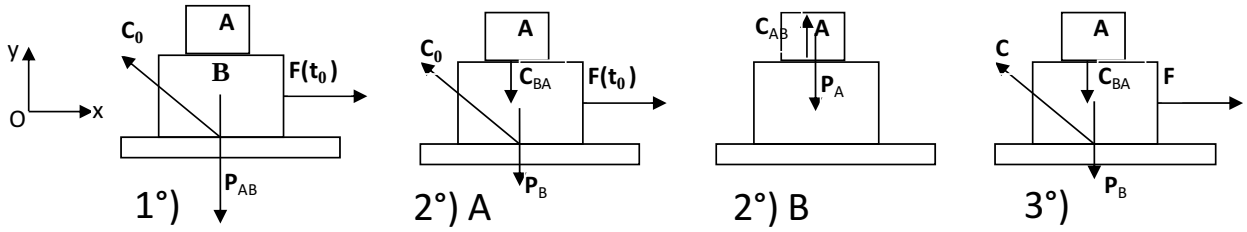
Ox : $\left\|\vec{F}\right\| \cos\alpha - \left\|\vec{C}_x\right\| = 2ma \Longrightarrow \left\|\vec{C}_x\right\| = \left\|\vec{F}\right\| \cos\alpha - 2ma = 9.98N$

3.b. Oy : $-\left\|\vec{F}\right\| \sin\alpha - 2mg + \left\|\vec{C}_y\right\| = 0 \Longrightarrow \left\|\vec{C}_y\right\| = \left\|\vec{F}\right\| \sin\alpha + 2mg = 54.24N$

d'où $\mu_d = \left\|\vec{C}_x\right\| / \left\|\vec{C}_y\right\| = \left(\left\|\vec{F}\right\| \cos\alpha - 2ma\right) / \left(\left\|\vec{F}\right\| \sin\alpha + 2mg\right) = 0.18$

Exercice 5

Données $m_A = 2kg$, $m_B = 3kg$, $\alpha = 0.5N/s$, $F(t) := \alpha t$, $\mu_s = 0.5$, $\mu_d = 0.5$, $g = 10m/s^2$.



1. Système $(A+B)$ à la limite de l'équilibre :

$(m_A + m_B)\,\vec{g} + \vec{C}_0 + \vec{F}_0 = \vec{0}$

Ox : $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \alpha t_0$

Oy : $\left\|\vec{C}_{0y}\right\| = (m_A + m_B)\,g$

$\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{0y}\right\| \Rightarrow t_0 = \frac{\mu_s}{\alpha}\,(m_A + m_B)\,g = 50s$

2. Pour $t_1 = 30s$, on a un équilibre simple. Pour chaque système on doit avoir $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$. D'où (l'unité pour toutes les force est le N) :

Corps A seul : $\vec{P}_A = -m_A g\vec{j} = -20\vec{j}$, $\vec{C}_{AB} = -\vec{P}_A = 20\vec{j}$

Corps B seul : $\vec{P}_B = -m_B g\vec{j} = -30\vec{j}$, $\vec{C}_{BA} = -\vec{C}_{AB} = \vec{P}_A = -20\vec{j}$, $\vec{F}_1 = \alpha t_1\vec{i} = 15\vec{i}$et $\vec{C} = -\alpha t_1\vec{i} + g\,(m_A + m_B)\,\vec{j} = -15\vec{i} + 50\vec{j}$

Corps A et B : $\vec{P} = -\,(m_A + m_B)\,g\vec{j} = -50\vec{j}$, $\vec{F}_1 = \alpha t_1\vec{i}$ et $\vec{C} = -\alpha t_1\vec{i} + g\,(m_A + m_B)\,\vec{j}$

3. A $t_2 = 60s$, le corps B glisse sur le sol et par rapport au corps A avec lequel il n'a pas de frottements. Autrement dit, le corps A reste au repos et n'est pas entraîné par B car il n'est soumis qu'aux forces verticales $\vec{P}_A$ et $\vec{C}_{AB}$.

Corps A seul : $\vec{P}_A = -m_A g\vec{j} = -20\vec{j}$, $\vec{C}_{AB} = -\vec{P}_A = 20\vec{j}$

Corps B seul : $\vec{P}_B = -m_B g\vec{j} = -30\vec{j}$, $\vec{C}_{BA} = -\vec{C}_{AB} = \vec{P}_A = -20\vec{j}$, $\vec{F}_2 = \alpha t_2\vec{i} = 30\vec{i}$ et $\vec{C}$

RFD pour B : $\vec{P}_B + \vec{C}_{BA} + \vec{F}_2 + \vec{C} = m\vec{a}$ et $\left\|\vec{C}_x\right\| = \mu_d \left\|\vec{C}_y\right\|$

Ox : $\left\|\vec{F}_2\right\| - \left\|\vec{C}_x\right\| = ma$

Oy : $-m_B g - m_A g + \left\|\vec{C}_y\right\| = 0$

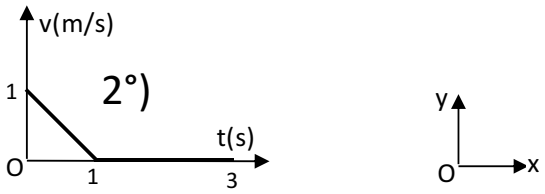
$\left\|\vec{C}_y\right\| = g\,(m_A + m_B) = 50N$ et $\left\|\vec{C}_x\right\| = \mu_d g\,(m_A + m_B) = 25N \Rightarrow \left\|\vec{C}\right\| = g\,(m_A + m_B)\,\sqrt{1 + \mu_d^2} = 55.9N$

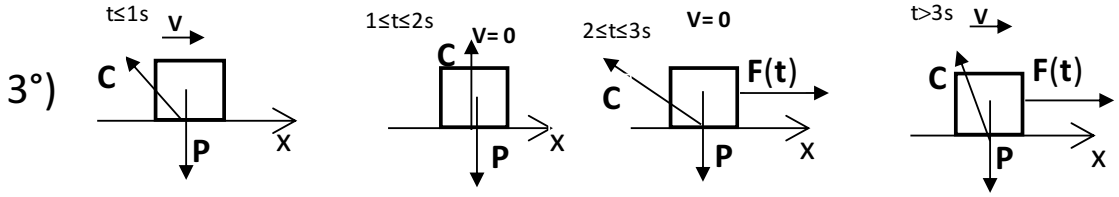
En résumé : $\left\|\vec{P}_B\right\| = 30N \rightarrow 3cm$, $\left\|\vec{F}_2\right\| = 30N \rightarrow 3cm$, $\left\|\vec{C}\right\| = 5.59N \rightarrow 5.59cm$,

Pour dessiner la force réelle $\vec{C}$, il est plus facile de dessiner ces composantes ($\left\|\vec{C}_y\right\| = 50N \rightarrow 5cm$, $\left\|\vec{C}_x\right\| = 25N \rightarrow 2.5cm$) en tirets pour rappeler qu'elles ne sont pas des forces réelles mais des composantes mathématiques.

Exercice 6

Données : $m = 0.5kg$, $v_0 = 1m/s$.



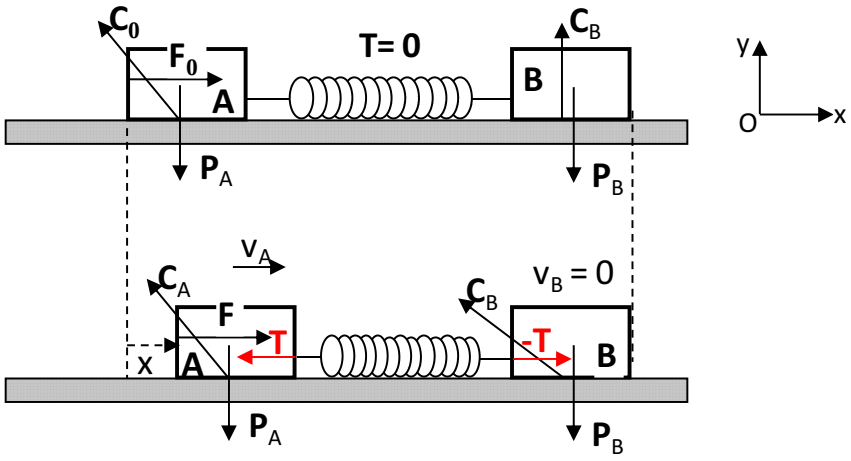


1. $v\left(t\right)-v\left(0\right)=A\left(0,t,a\right)\Rightarrow 1=A\left(0,t,a\right)\Rightarrow 1=A\left(0,1,a\right)+A\left(3,t,a\right)=-1+\frac{1}{2}\left(3+a\right)\left(t-3\right)$. L'équation de a est $a=4\left(t-3\right)+3=4t-9$. On doit résoudre
$1=-1+\frac{1}{2}\left(3+4t-9\right)\left(t-3\right)\Rightarrow 2t^2-9t+7=0$. Les solutions sont $\left\{\left[t=1.0s\right],\left[t=35s\right]\right\}$ mais la première n'est pas acceptable car on a pris $t>3s$.
2. Graphe de $v\left(t\right)$

$t\left(s\right)$	$[0,1]$	$[1,3]$	$t=3s$	$t>3s$
$a\left(m/s^2\right)$	-1 (constante)	0 (constante)	discontinue	droite
$v\left(m/s\right)$	Droite entre $v_0=1$ et $v\left(1\right)=0$	Droite entre $v\left(1\right)=0$ et $v\left(3\right)=0$		parabole
Mouvement	MRUR	Repos	limite de l'équilibre	glissement
Forces sur Ox :	frottements $\vec{C}_x$	0 $(t<2)$, $\vec{C}_x$ et F $(t>2)$	$\vec{C}_{0x}$ et $\vec{F}\left(3\right)$	$\vec{C}_x$ et $\vec{F}\left(t\right)$

Avant $t=1s$, le mouvement est retardé jusqu'à l'arrêt par $\vec{C}_x$. On peut calculer μ_d dans cette phase $\mu_d=\left\|\vec{C}_x\right\|/\left\|C_y\right\|=m\left|a\right|/mg=0.1$. Entre $1s$ et $2s$, le corps reste au repos sous l'action de $\vec{P}+\vec{C}=\vec{0}$. Après $2s$, la force $\vec{F}$ commence à agir mais elle n'est pas assez grande pour faire glisser le corps. A $t=3s$, l'accélération fait un saut et le corps demarre, c'est la limite de l'équilibre $\vec{C}_0+\vec{P}+\vec{F}_0=\vec{0}$. Après $3s$, c'est la phase de glissement $\vec{P}+\vec{C}+\vec{F}=m\vec{a}$.
3.a. Pour $t>3s$, la masse glisse dans le sens positif $v>0$. RFD : $\vec{P}+\vec{C}+\vec{F}=m\vec{a}$
Sur Ox : $-\left\|\vec{C}_x\right\|+\left\|\vec{F}\right\|=ma$. Sur Oy : $-mg+\left\|\vec{C}_y\right\|=0$. Glissement : $\left\|\vec{C}_x\right\|=\mu_D\left\|\vec{C}_y\right\|=\mu_D mg$
3.b. A $t=4s$, $a=7m/s^2$ avec $\mu_D=0.1$ et $g=10m/s^2$. Donc
$\left\|\vec{P}\right\|=\left\|\vec{C}_y\right\|=5N$, $\left\|\vec{C}_x\right\|=\mu_D mg=0.5N$ et $\left\|\vec{F}\right\|=ma+\left\|\vec{C}_x\right\|=4N$. $\left(\left\|\vec{C}\right\|=\sqrt{\left(0.5\right)^2+5^2}N=5.02N\right)$
3.c. Pour $t>3s$, on a $a=4t-9$, $\left\|\vec{F}\right\|=ma+\left\|\vec{C}_x\right\|$ et $\left\|\vec{C}_x\right\|=mg\mu_D$. Donc $\left\|\vec{F}\right\|=2t-4$ en (N).
3.d. Détermination de μ_s :
D'après le graphe de $v\left(t\right)$, entre $t=0s$ et $t=1s$, on a mouvement décéléré jusqu'à ce qu'elle s'arrête avec une accélération $a=-1m/s^2$ due uniquement à $\left\|\vec{C}_x\right\|=-ma=0.5N$ ce qui donne bien $\mu_d=\frac{\left(-ma\right)}{mg}=0.1$. Entre $t=1s$ et $t=2s$, la masse est au repos $v=0m/s$. A partir de $t=2s$, la force commence à agir mais la masse reste immobile jusqu'à $t=3s$ où elle commence à glisser. Donc $t=3s$ correspond à la limite (rupture de l'équilibre). D'où :
RFD : $\vec{P}+\vec{C}_0+\vec{F}\left(3\right)=\vec{0}\Rightarrow-\left\|\vec{C}_{0x}\right\|+\left\|\vec{F}\left(3\right)\right\|=0$ et $-mg+\left\|\vec{C}_{0y}\right\|=0$. Donc $\mu_s=\frac{\left\|\vec{C}_{0x}\right\|}{\left\|\vec{C}_{0y}\right\|}=\frac{\left\|\vec{F}(3)\right\|}{mg}=0.4$.

Exercice 7
Données $M=1kg$, $\mu_s=0.5$, $\mu_g=0.4$, $k=200N/m$, $g=10m/s^2$.



1. Comme le ressort n'est ni comprimé ni tendu, on a $T = 0N$. A la limite de l'équilibre, on écrit $\vec{P} + \vec{C}_0 + \vec{F}_0 = \vec{0}$ avec $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{0y}\right\|$. Les projections donnent $\left\|\vec{C}_{0y}\right\| = Mg$ et $\left\|\vec{F}_0\right\| = \left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s Mg = 5N$.

2. Pour A, on a $\left\|\vec{P}_A\right\| = \left\|\vec{C}_{0y}\right\| = Mg = 10N \to 5cm$, $\left\|\vec{F}_0\right\| = \left\|\vec{C}_{0x}\right\| = 5N \to 2.5cm$

Pour B, on a $\left\|\vec{P}_B\right\| = Mg = 10N \to 5cm$, $\left\|\vec{C}_B\right\| = \left\|\vec{C}_{By}\right\| = \left\|\vec{P}\right\| = 10N \to 5cm$.

3. Quand A se déplace, le ressort est comprimé et la même force de rappel agit sur chaque masse $\left\|\vec{T}\right\| = kx$ avec $x = 2cm$. La force $\left\|\vec{F}\right\|$ doit augmenter avec $\left\|\vec{T}\right\|$ pour garantir une accélération nulle et une vitesse constante :

Pour A, on a $\vec{P}_A + \vec{C}_A + \vec{F} + \vec{T} = M\vec{a} = \vec{0}$ (vitesse constante).

Sur Oy : $\left\|\vec{C}_{Ay}\right\| = Mg = 10N \to 5cm$

Sur Ox : $\left\|\vec{C}_{Ax}\right\| = \mu_g Mg = 4N \to 2cm$, $\left\|\vec{T}\right\| = kx = 4N \to 2cm$ et $\left\|\vec{F}\right\| = \left\|\vec{C}_{Ax}\right\| + \left\|\vec{T}\right\| = 8N \to 4cm$.

Pour B, on a $\vec{P}_B + \vec{C}_B - \vec{T} = M\vec{a} = \vec{0}$ (car $\left\|\vec{T}\right\| = kx = 4N < 5N$, donc B est au repos).

Sur Oy : $\left\|\vec{C}_{By}\right\| = Mg = 10N \to 5cm$.

Sur Ox : $\left\|\vec{C}_{Bx}\right\| = \left\|\vec{T}\right\| = 4N \to 2cm$.

4. et 5. Le corps B commence à ce déplacer quand $\vec{C}_B = \vec{C}_{B0}$.

Pour B, on a $\vec{P}_B + \vec{C}_{B0} - \vec{T}_0 = \vec{0}$ (limite de l'équilibre)

sur Oy : $\left\|\vec{C}_{B0y}\right\| = Mg = 10N \to 5cm$

Sur Ox : $\left\|\vec{C}_{B0x}\right\| = \mu_s Mg = 5N \to 2.5cm$ et $\left\|\vec{T}_0\right\| = \left\|\vec{C}_{0x}\right\| = 5N \to 2.5cm$.

Donc $x_0 = \frac{\|\vec{T}_0\|}{k} \Rightarrow x_0 = 2.5cm$.

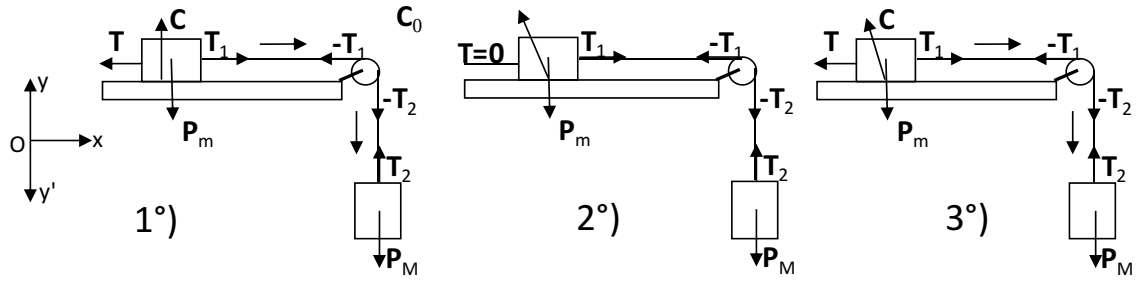
Pour A, on a $\vec{P}_A + \vec{C}_A + \vec{F} + \vec{T}_0 = M\vec{a} = \vec{0}$ (vitesse constante).

sur Oy : $\left\|\vec{C}_{Ay}\right\| = Mg = 10N \to 5cm$

Sur Ox : $\left\|\vec{C}_{Ax}\right\| = \mu_g Mg = 4N \to 2cm$, $\left\|\vec{T}_0\right\| = 5N \to 2.5cm$ et $\left\|\vec{F}\right\| = \left\|\vec{C}_{Ax}\right\| + \left\|\vec{T}_0\right\| = 9N \to 4.5cm$.

Exercice 8

Données : $k = 150N/m$, $m = 2kg$, $g = 9.81m/s^2$



1. L'origine est confondue avec la position de m quand le ressort a sa longueur à vide l_0. Quand m est à la position x, la force élastique est $\vec{T} = -k\,(x - 0)\,\vec{i} = -kx\vec{i}$.

Masse négligeable du fil : $\vec{T}_1$ et $\left(-\vec{T}_1\right)$ ainsi que $\vec{T}_2$ et $\left(-\vec{T}_2\right)$. Masse négligeable de la poulie : $\left\|\vec{T}_1\right\| = \left\|\vec{T}_2\right\|$. Frottements négligeables : $\vec{C}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = \vec{C}_y$.

Fil inextensible : $a_1 = a > 0$ et $a_2 = -a < 0$ car $a_2 < 0$ sur Oy. Sur Oy', on aura $a_1 = a_2 = a$.

Système	m	M
Forces	$\vec{P}_m = m\vec{g}$, $\vec{C}$, $\vec{T}$ (ressort) et $\vec{T}_1$ (fil)	$\vec{P}_M = M\vec{g}$ et $\vec{T}_2$ (fil)
RFD	$\vec{P}_m + \vec{T} + \vec{C} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1$	$\vec{P}_M + \vec{T}_2 = M\vec{a}_2$
Ox	$-kx + \left\|\vec{T}_1\right\| = ma$ (1)	Rien
Oy'	$mg - \left\|\vec{C}\right\| = 0$	$Mg - \left\|\vec{T}_1\right\| = Ma$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow a = \frac{(Mg - kx)}{(M+m)}$ et (2) $\Rightarrow \left\|\vec{T}_1\right\| = M\,(g - a) = \frac{M(gm+kx)}{(M+m)}$

2. Il s'agit de la limite de l'équilibre avec $\mu_s = 0.8$, $\vec{C} = \vec{C}_0$, $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{0y}\right\|$ et $T = 0N$. On reprend le calcul de la question précédente

Système	m	M
Forces	$\vec{P}_m = m\vec{g}$, $\vec{C}_0$, et $\vec{T}_1$ (fil)	$\vec{P}_M = M\vec{g}$ et $\vec{T}_2$ (fil)
RFD	$\vec{P}_m + \vec{C}_0 + \vec{T}_1 = \vec{0}$	$\vec{P}_M + \vec{T}_2 = \vec{0}$
Ox	$-\left\|\vec{C}_{0x}\right\| + \left\|\vec{T}_1\right\| = 0$ (1)	Rien
Oy'	$mg - \left\|\vec{C}_{0y}\right\| = 0$	$Mg - \left\|\vec{T}_1\right\| = 0$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \left\|\vec{C}_{0x}\right\| = Mg$. Comme $\left\|\vec{C}_{0x}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{0y}\right\| = \mu_s mg$, on trouve $M = \mu_s m = 1.6kg$

3. Dans ce cas, on a un glissement avec $M = 3kg$, $\mu_d = 0.25$ et $x = 0.1m$. La seule différence avec la première question est que $\left\|\vec{C}_x\right\| = \mu_d \left\|\vec{C}_y\right\|$ et $\vec{T}$ n'est pas nulle :

Système	m	M
Forces	$\vec{P}_m = m\vec{g}$, $\vec{C}$, $\vec{T}$ (ressort) et $\vec{T}_1$ (fil)	$\vec{P}_M = M\vec{g}$ et $\vec{T}_2$ (fil)
RFD	$\vec{P}_m + \vec{T} + \vec{C} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1$	$\vec{P}_M + \vec{T}_2 = M\vec{a}_2$
Ox	$-kx - \left\|\vec{C}_x\right\| + \left\|\vec{T}_1\right\| = ma$ (1)	Rien
Oy'	$mg - \left\|\vec{C}_y\right\| = 0$	$Mg - \left\|\vec{T}_1\right\| = Ma$ (2)

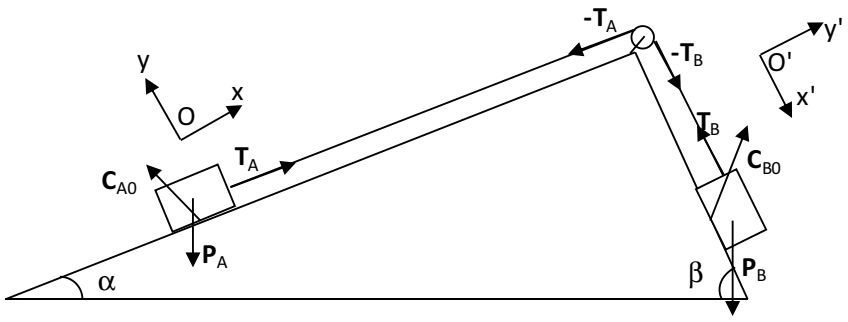
Comme $\left\|\vec{C}_x\right\| = \mu_d \left\|\vec{C}_y\right\| = \mu_d mg$, l'addition (1) + (2) donne : $a = \frac{g(M-\mu_d m)-kx}{m+M} = 1.91m/s^2$

La relation (2) implique que $\left\|\vec{T}_1\right\| = M(g-a) = M\left(\frac{gm(1+\mu_d)+kx}{m+M}\right) = 23.71N$

Exercice 9

Données : $m_A < m_B$, $m_B = 1kg$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\mu_s = 0.5$, $\mu_d = 0.3$, $g = 10m/s^2$.

1. Comme $m_A < m_B$ et $\alpha < \beta$, c'est m_A qui doit monter. Alors m_B doit descendre. Les forces de contact s'opposent à ce sens du mouvement :



2. Masses négligeables du fil et de la poulie : $\left\|\vec{T}_A\right\| = \left\|\vec{T}_B\right\| = \left\|\vec{T}\right\|$. Les forces responsables du mouvement sont $m_A g\sin\alpha$ et $m_B g\sin\beta$. Par conséquent, le mouvement tend à avoir lieu vers la droite car on a les mêmes coefficients de frottement avec $m_A < m_B$ et $\alpha < \beta$. Les forces $\vec{C}_A$ et $\vec{C}_B$ sont donc inclinées vers la gauche car elles s'opposent au glissement.

On suppose que les deux masses sont à la limite de l'équilibre ($\vec{C}_A = \vec{C}_{A0}$ et $\vec{C}_B = \vec{C}_{B0}$) :

Système	m_A	m_B
Forces	$\vec{P}_A = m_A\vec{g}$, $\vec{C}_{A0}$, $\vec{T}_A$ (fil)	$\vec{P}_B = M_B\vec{g}$, $\vec{C}_{B0}$, $\vec{T}_B$ (fil)
RFD	$\vec{P}_A + \vec{C}_{A0} + \vec{T}_1 = \vec{0}$	$\vec{P}_B + \vec{C}_{B0} + \vec{T}_B = \vec{0}$
$Ox, O'x'$	$-m_A g\sin\alpha - \left\|\vec{C}_{A0x}\right\| + \left\|\vec{T}\right\| = 0$ (1)	$m_B g\sin\beta - \left\|\vec{C}_{B0x'}\right\| - \left\|\vec{T}\right\| = 0$ (2)
$Oy, O'y'$	$-m_A g\cos\alpha + \left\|\vec{C}_{A0y}\right\| = 0$	$-m_B g\cos\beta + \left\|\vec{C}_{B0y'}\right\| = 0$
Limite	$\left\|\vec{C}_{A0x}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{A0y}\right\| = \mu_s m_A g\cos\alpha$	$\left\|\vec{C}_{B0x}\right\| = \mu_s \left\|\vec{C}_{B0y}\right\| = \mu_s m_B g\cos\beta$

(1) + (2) donne $-m_A g\sin\alpha - \left\|\vec{C}_{A0x}\right\| + m_B g\sin\beta - \left\|\vec{C}_{B0x'}\right\| = 0$. Donc

$$m_A = \frac{m_B(\sin\beta - \mu_s\cos\beta)}{(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha)} = 0.38kg.$$

3. Pour $m_A = \frac{m_B(\sin\beta-\mu_s\cos\beta)}{(\sin\alpha+\mu_s\cos\alpha)}$, l'équation (1) donne $\left\|\vec{T}\right\| = m_A g(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha) = m_B g(\sin\beta - \mu_s\cos\beta)$. L'équation (2) donne directement la même valeur $\left\|\vec{T}\right\| = m_B g(\sin\beta - \mu_s\cos\beta) = 3.54N$.

4. On a un glissement car $m_A = 0.3kg < 0.38kg$ sans changement des directions des forces. Fil inextensible $\Rightarrow a_A = a_B = a$ (algébrique, voir sens des axes Ox et $O'x'$)

Système	m_A	m_B
Forces	$\vec{P}_A = m_A\vec{g}$, $\vec{C}_A$, $\vec{T}_A$ (fil)	$\vec{P}_B = M_B\vec{g}$, $\vec{C}_B$, $\vec{T}_B$ (fil)
RFD	$\vec{P}_A + \vec{C}_A + \vec{T}_1 = m_A\vec{a}_A$	$\vec{P}_B + \vec{C}_B + \vec{T}_B = m_B\vec{a}_B$
$Ox, O'x'$	$-m_Ag\sin\alpha - \left\|\vec{C}_{Ax}\right\| + \left\|\vec{T}\right\| = m_Aa$ (1)	$m_Bg\sin\beta - \left\|\vec{C}_{Bx'}\right\| - \left\|\vec{T}\right\| = m_Ba$ (2)
$Oy, O'y'$	$-m_Ag\cos\alpha + \left\|\vec{C}_{Ay}\right\| = 0$	$-m_Bg\cos\beta + \left\|\vec{C}_{By'}\right\| = 0$
Limite	$\left\|\vec{C}_{Ax}\right\| = \mu_d \left\|\vec{C}_{Ay}\right\| = \mu_d m_Ag\cos\alpha$	$\left\|\vec{C}_{Bx'}\right\| = \mu_d \left\|\vec{C}_{By'}\right\| = \mu_d m_Bg\cos\beta$

$(1)+(2) \Rightarrow a = \left(-m_Ag\sin\alpha - \left\|\vec{C}_{Ax}\right\| + m_Bg\sin\beta - \left\|\vec{C}_{Bx'}\right\|\right) / (m_A+m_B)$

Donc $a = g\frac{[m_B(\sin\beta-\mu_d\cos\beta)-m_A(\sin\alpha+\mu_d\cos\alpha)]}{m_A+m_B} = 2m/s^2$

Exercice 10

La force appliquée à la comète est la force gravitationnelle. C'est une force centrale (parce qu'elle est constamment dirigée vers le même point, la terre). Le moment cinétique est donc constant : $\vec{L}_0 = \vec{L}_1$. En module,
$L_0 = mv_0r_0\sin\alpha = mv_0a_0$ et $L_1 = mv_1d_1\sin\frac{\pi}{2} = mv_1d_1$. Alors $L_0 = L_1 \implies v_1 = \frac{a_0}{d_1}v_0$

Exercice 11

Forces : $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{T}$ et $\vec{\Pi}$ (poussée d'Archimède). La mouvement a lieu dans le plan de la table donc $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$. La tension du fil $\vec{T}$ est centrale et c'est la seule force qui agit sur la masse. Le moment cinétique $L = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ est constant. Pour un mouvement circulaire $\vec{r} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, donc $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$ avec $\dot{\theta} = \omega$. La conservation du moment cinétique s'écrit alors

$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2 \implies \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1$

Si $r_2 < r_1$, alors $\omega_2 > \omega_1$. Si $r_2 > r_1$, alors $\omega_2 < \omega_1$.

Exercice 12

1. $\vec{F} = -G\frac{m_1M}{r^2}\vec{u}_r = m_1\left(-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r\right) = m_1\vec{g}$ où $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -g\vec{u}_r$. Au voisinage de la Terre, $\vec{g}_0 = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}_r = -g_0\vec{u}_r$.

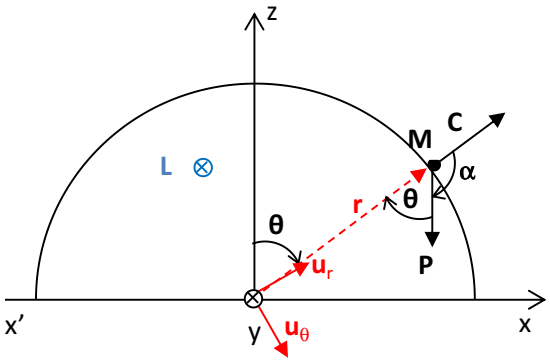
Donc $g = \left(\frac{R}{r}\right)^2 g_0 = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 g_0$

2. $\left\|\vec{F}\right\| = G\frac{m_1M}{r_1^2} = m_1a_n$ (mouvement uniforme $a_t = 0$). L'accélération normale est $g = a_n = m_1\frac{v_1^2}{r_1}$ où $v = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \omega_1r_1$ pour un mouvement circulaire uniforme (voir aussi l'exercice précédent).

Donc $G\frac{M}{r_1^2} = 4\pi^2\frac{r_1}{T_1^2} \Rightarrow \frac{r_1^3}{T_1^2} = G\frac{M}{4\pi^2} = Const \Rightarrow \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}$

Exercice 13

1. Forces appliquées à m : $\vec{P}$ et $\vec{C}$ (normale à la sphère car il n'y a pas de frottements).



$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

On voit que $d\vec{v}$ est dans le plan défini par $\vec{P}$ et $\vec{C}$. Comme la vitesse initiale est nulle, toutes les vitesses (donc le mouvement) sont dans ce même plan.

2. Il s'agit du calcul dans le cas particulier où $r = R$. On peut utiliser les formules connues avec la notation $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$:

$$v_r = \dot{r} = 0 \text{ et } v_\theta = r\dot{\theta} = R\dot{\theta}$$
$$a_r = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -R\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = R\ddot{\theta}$$

On peut faire aussi un calcul direct en utilisant les relations $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$. Le vecteur position est $\vec{r} = R\vec{u}_r$. Le vecteur vitesse est $\vec{v} = R\frac{d\vec{u}_r}{dt}$. Donc

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Le vecteur accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$. Donc

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

3. $\vec{L} = m\,(\vec{r} \wedge \vec{v})$. D'après la figure, on a $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{j}$ (vecteur unitaire de l'axe $y'Oy$). Sachant que $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r = \vec{0}$, on obtient $\vec{r} \wedge \vec{v} = R^2\dot{\theta}\vec{j}$ et $\vec{L} = mR^2\dot{\theta}\vec{j}$.
Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{P}$ car $\left(\vec{r} \parallel \vec{C}\right)$. Or $\frac{d\vec{L}}{dt} = mR^2\ddot{\theta}\vec{j}$ et la figure montre $\vec{r} \wedge \vec{P} = Rmg\sin\theta\vec{j}$. Par conséquent,

$$mR^2\ddot{\theta} = Rmg\sin\theta \Rightarrow R\ddot{\theta} = g\sin\theta$$

C'est l'équation différentielle demandée.
4. RFD : $\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} = m\left(-R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta\right)$
Sur $\vec{u}_r$ on a : $-mg\cos\theta + \left\|\vec{C}\right\| = -mR\dot{\theta}$ et sur $\vec{u}_\theta$ on a : $mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \Rightarrow R\ddot{\theta} = g\sin\theta$.